نام و نام خانوادگی : .....

شماره دانشجویی : .....

نام مدرس : .....

گروه آموزشی : **ریاضي**

تاریخ : **۱۳۹۰/۲/۶**

وقت : **۷۵** دقیقه

**دانشکده ریاضي**

امتحان میان ترم درس : **ریاضي۲-فني ( ۱۲ گروه هماهنگ )**

نیمسال ( ~~اول~~ / **دوم** ) **۱۳۹۰**-۱۳**۸۹**

---

**توجه : مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.**

**سوال ۱ –** الف) معادله کره ای را بنویسید که از نقطه $A=(۳,-۴,۲)$ گذشته و بر صفحات $P_۱ : x-۲y+۲z=۱۵$ و $P_۲ : x-۲y+۲z=-۳$ مماس باشد. **۱۰ نمره**

ب ) شکل تقریبی رویه $\rho=\cos\varphi$ را رسم کنید. **۱۰ نمره**

**سوال ۲ –** الف) شکل تقریبی منحنی $f(t)=(۲\cos\theta,۳\sin\theta,۲)$ را رسم کنید. **۵ نمره**

ب ) نقاطی از منحنی فوق را بیابید که انحنا در آن نقاط ماکزیمم می شود. **۱۰ نمره**

**سوال ۳ –** نقطه ای از رویه $z=۳x^۲+۴y^۲$ را بیابید که صفحه مماس بر رویه در آن نقطه ، بر خط گذرنده از نقاط $A=(۳,۵,۰)$ و $B=(-۱,-۳,۲)$ عمود باشد. **۱۵ نمره**

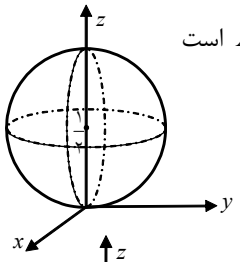
**سوال ۴ –** الف) مقدار مشتق سویی تابع $f(x,y,z)=x^۲-y^۲+z^۲+xz^۲$ در نقطه $A=(۱,۱,۲)$ و در جهت بردار $u=\frac{۱}{۳}(۱,-۲,۲)$ را بیابید. **۱۰ نمره**

ب ) جهتی را بیابید که مقدار مشتق سویی تابع فوق در آن جهت ماکزیمم می شود. **۵ نمره**

**سوال ۵ –** اگر $w=(x+y)f(x^۲+y^۲)$ نشان دهید که $\frac{w_x-f(x^۲+y^۲)}{w_y-f(x^۲+y^۲)}=\frac{x}{y}$ . **۲۰ نمره**

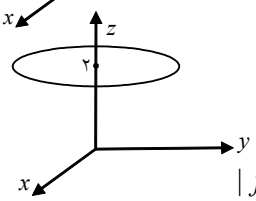
**موفق باشید**

**سوال ۱ -** دو صفحه موازی هستند و کره بین آنها قرار دارد. نقطه $A$ متعلق به صفحه $P_1$ و نقطه تماس صفحه و کره خواهد بود. اگر نقطه $B$ نقطه تماس صفحه $P_2$ و کره باشد، پاره خط $AB$ قطر کره است و بر هر دو صفحه عمود است و بردار هادی خط گذرا از آن ، بردار نرمال صفحه ها خواهد بود. معادله خط شامل $AB$ عبارت است از $\frac{x-3}{1}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z-2}{2}$ از قطع دادن این خط و صفحه $P_2$ نقطه $B=(1,0,-2)$ بدست می‌آید. طول $AB$ برابر ۶ است یعنی شعاع کره برابر ۳ است. مرکز کره وسط پاره خط $AB$ است یعنی $M=(2,-2,0)$ و معادله کره برابر است با : $(x-2)^2+(y+2)^2+z^2=9$




ب ) می نویسیم $\rho^2=\rho\cos\varphi$ که در دستگاه مختصات دکارتی به صورت $x^2+y^2+z^2=z$ نوشته می شود و معادله یک کره است. البته می توان آن را در دستگاه کروی و به کمک نقطه یابی نیز رسم کرد.

**سوال ۲ –** الف) داریم $x=2\cos\theta$ و $y=3\sin\theta$ و در نتیجه $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ که معادله یک بیضی است و چون $z=2$ پس بیضی درون صفحه $z=2$ قرار دارد. البته می توان آن را به کمک نقطه یابی نیز رسم کرد.




ب ) $f'(\theta)=(-2\sin\theta,3\cos\theta,0)$ و $f''(\theta)=(-2\cos\theta,-3\sin\theta,0)$

$$|f'|=\sqrt{4\sin^2\theta+9\cos^2\theta}=\sqrt{4+5\cos^2\theta} \quad \text{و} \quad |f'\times f''|=|(0,0,6)|=6$$

بنابر این $\kappa(\theta)=\frac{6}{\sqrt{(4+5\cos^2\theta)^3}}$ و $\kappa'(\theta)=\frac{45\sin 2\theta}{\sqrt{(4+5\cos^2\theta)^5}}$ $\kappa'(\theta)=0$ آنگاه $\theta=\frac{k\pi}{2}$ می توان دید که به ازای $\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ ماکزیمم انحنا و به ازای $\theta=0,\pi$ مینیمم انحنا اتفاق می افتد.

**سوال ۳ - روش اول** : اگر صفحه مورد نظر به صورت $ax+by+cz=d$ نوشته شده باشد و نقطه تماس صفحه و رویه نقطه $(x_0,y_0,z_0)$ باشد آنگاه چون $\nabla z=(6x,8y)$ پس بردار نرمال صفحه هم امتداد بردار $(6x_0,8y_0,-1)$ است و همینطور باید هم امتداد بردار هادی خط گذرنده بر $A$ و $B$ یعنی $u=(4,8,2)$ باشد پس $\lambda(6x_0,8y_0,-1)=(4,8,2)$ در نتیجه $\lambda=-2$ و $x_0=-\frac{1}{3}$ و $y_0=-\frac{1}{2}$ و نقطه مورد نظر عبارت است از : $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{2},\frac{4}{3})$

**روش دوم :** بردار $u=(4,8,2)$ بردار هادی خط گذرنده از نقاط $A$ و $B$ است و چون بر صفحه عمود است پس با بردار نرمال آن هم امتداد است. اگر معادله صفحه مورد نظر به صورت $ax+by+cz=d$ باشد. آنگاه باید $(a,b,c)=\lambda(4,8,2)$ و معادله صفحه به صورت $2x+4y+z=\frac{d}{2\lambda}$ در می‌آید. اکنون این صفحه باید با رویه داده شده اشتراک داشته باشد. یعنی باید معادله $2x+4y+3x^2+4y^2=\frac{d}{2\lambda}$ جواب داشته باشد اما $3(x+\frac{1}{3})^2+4(y+\frac{1}{2})=\frac{d}{2\lambda}+\frac{4}{3}$ اکنون اگر $\frac{d}{2\lambda}+\frac{4}{3}\geq 0$ دو رویه اشتراک دارند و اگر $\frac{d}{2\lambda}+\frac{4}{3}=0$ و یا $\frac{d}{2\lambda}=-\frac{4}{3}$ دو رویه بر هم مماس هستند زیرا $3(x+\frac{1}{3})^2+4(y+\frac{1}{2})=0$ و جواب منحصر بفرد $x=-\frac{1}{3}$ و $y=-\frac{1}{2}$ را دارد و نقطه مورد نظر مساله عبارت است از : $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{2},\frac{4}{3})$

**سوال ۴ -** داریم $\nabla f=(2x+z^2,-2y,2z+2xz)$ و $\nabla f(A)=(6,-2,8)$ بنابراین

$$D_u f(A)=\nabla f(A)\cdot u=\frac{1}{3}(6,-2,8)\cdot(1,-2,2)=\frac{26}{3}$$

ب ) مشتق سویی در جهت بردار $\nabla f(A)=(6,-2,8)$ ماکزیمم مقدار خود را اختیار می کند.

**سوال ۵ –** $w_x=f(x^2+y^2)+2x(x+y)f'(x^2+y^2)$ , $w_y=f(x^2+y^2)+2y(x+y)f'(x^2+y^2)$.

یعنی :
$$\frac{w_x-f(x^2+y^2)}{w_y-f(x^2+y^2)}=\frac{2x(x+y)f'(x^2+y^2)}{2y(x+y)f'(x^2+y^2)}=\frac{x}{y}$$